

ÁLGEBRA MATRICIAL

Una *matriz* es un arreglo cuadrangular de números o símbolos genericamente denominados *elementos*. Los elementos pueden ser escalares, expresiones algebraicas u otras matrices.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} = \{m_{ij}\}$$

\mathbf{M} es un ejemplo de matriz de *dimensiones* 3 x 2 (3 filas x 2 columnas). El primer subíndice (i) indica número de filas, el segundo (j) el número de columnas. Cuando las dimensiones son iguales, basta con indicar el *orden* (dimensión común) de la matriz (e.g. una matriz de 4 x 4 es de orden 4). La *diagonal* de una matriz está compuesta por los elementos con igual subíndice para fila y columna. La diagonal de \mathbf{M} está compuesta por 1 y 7 (i.e., m_{11} y m_{22}).

Una matriz de una sola dimensión se denomina *vector*. \mathbf{v} es un *vector fila* de 4 elementos; \mathbf{a} es un *vector columna* de 3 elementos. Por convención, 'vector' se refiere a un vector columna. Habitualmente se indican matrices con letras mayúsculas y vectores con letras minúsculas. Una matriz o vector constituido por un único elemento es un *escalar*.

$$\mathbf{v} = [1 \quad 6 \quad 11 \quad 2] \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 23 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Algunos tipos de matrices

Cuadrada (igual número de filas y columnas)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

En las matrices cuadradas se denomina *diagonal principal* a la que va de la izquierda arriba a la derecha abajo. La opuesta se denomina *diagonal secundaria*. Los elementos de la diagonal principal de \mathbf{A} son 1, 6 y 2; los de su diagonal secundaria son 3, 6 y 3. El orden de una matriz cuadrada es su número de filas o columnas.

Simétrica (sólo definido para cuadradas)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad b_{ij} = b_{ji} \quad \forall i, j$$

Son matrices cuadradas en las que los elementos indexados como ij son idénticos a los indexados como ji para todo i y j.

Triangular (sólo definido para cuadradas)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Son matrices cuadradas con los elementos por encima (triangular inferior) o por debajo (triangular superior) de la diagonal iguales a cero. **T** es una matriz triangular inferior.

Tridiagonal (sólo definido para cuadradas)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Son matrices cuadradas con todos sus elementos iguales a cero excepto los ubicados sobre la diagonal y a la derecha y a la izquierda de ésta. **Q** es una matriz tridiagonal.

“J” o “sólo 1’s” (cualquier dimensión)

Por convención, una matriz con todos sus elementos iguales a 1 es una ‘**J**’. Un vector con esas características se nota como $\mathbf{1}_n$ donde n indica su longitud.

Diagonal (sólo definido para cuadradas)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad d_{ij} = 0 \forall i \neq j \quad \text{y} \quad d_{ii} \neq 0 \forall i$$

También se pueden indicar:

$$\mathbf{D} = \text{diag} (d_1, \dots, d_n)$$

donde los d_i son los elementos diagonales de una matriz de orden n.

Escalar (sólo definido para cuadradas)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad e_{ij} = 0 \forall i \neq j \quad \text{y} \quad e_{ii} = a \neq 0 \forall i$$

Identidad

Una matriz escalar de 1's en su diagonal principal. Equivale al 1 de la multiplicación escalar (ver multiplicación de matrices más abajo).

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{I}_3 es un ejemplo de matriz identidad, en este caso de orden 3, lo que se indica con el subíndice (optativo).

Nula

Es una matriz de cualquier dimensión en la que todos sus elementos son ceros; se la indica como $\mathbf{0}$.

Operadores y operaciones con matrices

Traza

La *traza* (tr) es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -11 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{tr}(\mathbf{A}) = 9$$

Transpuesta

La *transpuesta* de una matriz es otra matriz que resulta de intercambiar filas por columnas. El operador correspondiente a la transpuesta se indica con una comilla o una letra 't' exponentiada.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Para poder sumar, restar o multiplicar matrices, éstas deben ser *conformables*, i.e. sus dimensiones deben ser tales que la operación sea posible. La *división* de matrices no está definida.

Adición y sustracción

Para poder sumar (o restar) dos matrices, éstas deben tener idénticas dimensiones. La matriz resultante se obtiene por suma (o resta) elemento a elemento. Si $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ y $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

El cero de la suma o resta es una matriz conformable nula. La adición y sustracción de matrices es conmutativa:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} - \mathbf{C}, \text{ etc.}$$

Multiplicación

Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda. La matriz resultante tendrá como dimensiones el número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 5)} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 & 9 & 3 \\ 9 & 15 & 21 & 21 & 6 \\ 7 & 13 & 19 & 15 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 5)}$$

Cada elemento ij de la matriz resultante se obtiene multiplicando (elemento a elemento) la i ésima fila de la primera matriz por la j ésima columna de la segunda y sumando esos productos.

$$r_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ji}$$

$$r_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4, \text{ etc.}$$

En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa; $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ no es equivalente a $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ y, en algunos casos, la operación puede no estar definida, i.e. el orden en la multiplicación de matrices no es inmaterial. Este orden se expresa al indicar que una matriz es *premultiplicada* o *postmultiplicada* por otra. La unidad en la multiplicación de matrices es una matriz identidad conformable.

Productos particulares

Si $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$, entonces \mathbf{A} es *idempotente*, necesariamente cuadrada pero no necesariamente simétrica.

Si $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$, entonces \mathbf{A} es *nulipotente*.

Si $\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$, entonces \mathbf{A} es *ortogonal*.

Norma euclidiana

Es un escalar, indicado como $\|\mathbf{A}\|$ para una matriz \mathbf{A} , que se calcula como la raíz cuadrada de la traza del producto de una matriz por su transpuesta.

$$\|\mathbf{A}\| = [\text{tr}(\mathbf{AA}')]^{1/2}$$

Se la aplica para determinar cuanto difieren entre sí dos matrices de igual orden.

Suma directa (símbolo \oplus)

Se aplica a matrices de cualquier dimensión. La suma directa de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n$ será:

$$\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{A}_3 \oplus \dots \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

Producto Hadamard (símbolo \cdot)

Esta definido para matrices conformables para adición; consiste en la multiplicación elemento a elemento, es conmutativo, la resultante tiene las mismas dimensiones que las matrices operadas. Si A y B son matrices de 2 x 2, su resultante será:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 77 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Producto Kronecker (símbolo \otimes)

En el producto Kronecker cada elemento de la primer matriz se multiplica (como escalar) por la segunda matriz. El producto Kronecker no es conmutativo, también se lo llama producto 'directo'. Si A tiene dimensiones 3 x 3 y B tiene dimensiones m x n, su resultante será:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \mathbf{B}_{m \times n} \quad \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5\mathbf{B} & \mathbf{B} & 9\mathbf{B} \\ 4\mathbf{B} & 2\mathbf{B} & 7\mathbf{B} \\ 2\mathbf{B} & 3\mathbf{B} & 3\mathbf{B} \end{bmatrix}_{(3m \times 3n)}$$

Inversión

Sólo está definida para matrices cuadradas. La inversa de una matriz **A** es otra matriz (notación \mathbf{A}^{-1}) tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Inversa de una matriz de 2x2

Sean **A** y \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} v & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

De la definición de inversa de una matriz:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{aligned} av + by &= 1 & [1] \\ ax + bz &= 0 & [2] \end{aligned}$$

$$cv + dy = 0 \quad [3]$$

$$cx + dz = 1 \quad [4]$$

y los elementos de \mathbf{A}^{-1} se pueden expresar en términos de los de \mathbf{A} .

De [3] se tiene que : $y = \frac{-cv}{d}$ y si se sustituye en [1] : $av - \frac{bcv}{d} = 1$

de donde : $v(a - \frac{bc}{d}) = 1$; $v \frac{ad - bc}{d} = 1$ y entonces $v = \frac{d}{ad - bc}$

De manera similar, al sustituir en las otras ecuaciones :

$$y = \frac{-c}{ad - bc}; \quad z = \frac{a}{ad - bc}; \quad y \quad x = \frac{-b}{ad - bc}$$

De donde :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} v & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

En la expresión final, el divisor común (ad - bc) es un escalar que se denomina *determinante* de la matriz. La matriz acompañante se denomina *adjunto* o *matriz adjunta* y es una matriz de *menores* con signo. Un *menor* es el determinante de una submatriz de la matriz original (ver más abajo).

El determinante de una matriz \mathbf{A} se nota habitualmente como $|\mathbf{A}|$. Una forma general de calcular determinantes es aplicando la expansión de Laplace. Para una matriz cuadrada \mathbf{A} de dimensiones $n \times n$, la expansión de Laplace se calcula:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{M}_{ij}|$$

Donde a_{ij} indica los correspondientes elementos de \mathbf{A} y las \mathbf{M}_{ij} , de dimensiones $(n - 1) \times (n - 1)$, son las n submatrices que pueden obtenerse eliminando la i ésima fila y la j ésima columna de \mathbf{A} . Cualquier fila o columna puede usarse para calcular el determinante. Cada menor multiplicado por el correspondiente signo recibe el nombre de *cofactor* (\mathbf{C}_{ij}):

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}|$$

El adjunto de \mathbf{A} en el ejemplo de inversa de matriz de 2×2 desarrollado más arriba se obtiene, entonces, reemplazando cada elemento de la matriz original por su cofactor y transponiendo la matriz resultante.

Sea \mathbf{A} (3×3):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Si se expande a lo largo de la primera fila para calcular su determinante:

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0$$

Note que:

- i. si el determinante de una matriz vale 0, no existe su inversa y se dice que tal matriz es *singular*, lo inverso es igualmente cierto:

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$$

- ii. si dos o más filas o columnas de una matriz son idénticas, entonces su determinante vale 0;
- iii. si cualquier fila o columna de una matriz consta únicamente de ceros, su determinante vale 0;
- iv. el valor del determinante no se altera por la adición a alguna fila o columna de otras filas o columnas de la matriz original multiplicadas por un escalar;
- v. si alguna fila o columna es una combinación lineal de otra(s), entonces su determinante vale 0.

En el ejemplo anterior, se verifica que la suma de la primera y tercera columnas (1 + 3, 4 + 6, 7 + 9) es igual al doble de la segunda (2 x 2, 2 x 5, 2 x 8):

$$\mathbf{A}_{i1} + \mathbf{A}_{i3} = 2 \cdot \mathbf{A}_{i2}$$

lo que implica (regla v. más arriba) que su determinante será igual a 0.

En general, si \mathbf{A} es una matriz y \mathbf{k} es un vector (conformable para multiplicación) la condición de independencia lineal implica que, a excepción de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, no existe \mathbf{k} alguno tal que $\mathbf{A}\mathbf{k} = \mathbf{0}$. A la inversa, un determinante igual a 0 implica que existe al menos un vector \mathbf{k} para el que se cumple que $\mathbf{A}\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Esa condición puede verificarse para más de un vector \mathbf{k} , es decir, puede existir más de una dependencia lineal entre filas o columnas de \mathbf{A} . El *rango* (R) de una matriz cuadrada es el número de filas o columnas linealmente independientes que ésta contiene. El rango de una matriz cuadrada siempre será menor o igual a su orden. Si el rango de una matriz es menor que su orden, su determinante vale 0, es singular, y no tiene *inversa regular*. Otros tipos de inversas pueden ser posibles para una matriz singular (ver más abajo).

Inversa de una matriz de 3x3

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

donde $|\mathbf{A}| = a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - eg)$

Existen diversos algoritmos para invertir matrices de mayores dimensiones; actualmente tales cálculos se realizan con computadoras.

Inversa de una matriz diagonal

La resultante es una matriz diagonal constituida por las inversas de los elementos diagonales de la matriz original.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

A menudo se utilizan matrices para representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales. La resolución de esos sistemas aplicando álgebra matricial habitualmente implica el cálculo de una inversa. La naturaleza de esa inversa depende del tipo de sistema que se considere.

Ejemplos:

$$1. \quad \begin{array}{r} 3a + b = 2 \\ 6a + 2b = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

de [1]: $a = (2 - b)/3$ y sustituyendo en [2]: $6[(2 - b)/3] + 2b = 2$ y $4 - 2b + 2b = 2$

de donde: $4 = 2$

$$2. \quad \begin{array}{r} 3a + b = 2 \\ 6a + 2b = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

de [1]: $a = (2 - b)/3$ y sustituyendo en [2]: $6[(2 - b)/3] + 2b = 4$ y $4 - 2b + 2b = 4$ [3]

y cualquier valor de b satisface [3].

$$3. \quad \begin{array}{r} 2a + b = 2 \\ 6a + 2b = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

de [1]: $a = (2 - b)/2$ y sustituyendo en [2]: $6[(2 - b)/2] + 2b = 4$ y $6 - 3b + 2b = 4$

de donde: $b = 2$ y sustituyendo en [1]: $a = 0$.

El primer ejemplo corresponde a un sistema *inconsistente*, i.e. un sistema sin solución posible. Nótese que la ecuación [2] es el doble de [1] sólo en su parte izquierda.

Los otros dos son ejemplos de sistemas *consistentes*. El sistema del segundo ejemplo admite *infinitas soluciones*. Nótese que la ecuación [2] es el doble de la [1] a ambos lados

del signo de igual lo que implica que [2] es una combinación lineal de [1] y que, por lo tanto, no son independientes entre sí. El tercer ejemplo corresponde a un sistema consistente con solución única. No es posible reproducir una de las ecuaciones a partir de combinaciones lineales de la otra.

Si se representan las ecuaciones del tercer ejemplo puede representarse utilizando una matriz (**A**) y dos vectores (**x** y **c**):

$$\mathbf{A} \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que se resuelve, como es habitual, despejando **x**: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} = [2 \quad 0]'$

Si se operara de manera similar el segundo ejemplo se observaría que el determinante de la matriz **A** valdría cero ($|\mathbf{A}| = 3 \times 2 - 6 \times 1 = 0$) lo que indica que la matriz no tiene *inversa regular*. Para poder hallar una de las infinitas soluciones del sistema hay se podría 1) imponer restricciones a los parámetros (*a* y *b*), 2) imponer restricciones a las soluciones (los valores numéricos de *a* y *b*), o 3) reparametrizar el sistema reduciendo el número de parámetros (e.g. definiendo unos en función de otros). De manera general, lo que se hace es calcular una *inversa generalizada* entre todas las infinitas posibles.

Inversa generalizada

Una inversa generalizada (notación \mathbf{A}^-) satisface la condición: $\mathbf{AA}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Para calcular la inversa generalizada de una matriz **A**:

- i. Determinar el rango de **A**, $R(\mathbf{A})$;
- ii. encontrar una submatriz **M** no singular de orden igual a $R(\mathbf{A})$;
- iii. invertir **M**;
- iv. sustituir en **A** cada elemento de **M** por el correspondiente en \mathbf{M}^{-1} ;
- v. completar los restantes elementos con ceros.

Si **A** se particiona:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$$

una inversa generalizada de **A** se calcula como:

$$\mathbf{A}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Puede probarse que \mathbf{A}^- es una inversa generalizada de **A** calculando $\mathbf{AA}^-\mathbf{A}$:

$$AA^{-1}A = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} =$$

$$AA^{-1}A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{R(A)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12} \end{bmatrix}$$

Puede demostrarse que si \mathbf{M}_{11} contiene $R(\mathbf{A})$ filas y columnas linealmente independientes de la matriz \mathbf{A} , entonces para matrices \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 (que no es necesario definir) se cumple:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} \\ \mathbf{M}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{K}_1$$

dado que las filas y columnas de las submatrices \mathbf{M}_{12} , \mathbf{M}_{21} y \mathbf{M}_{22} son linealmente dependientes de las filas y columnas de \mathbf{M}_{11} .

Entonces, si $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{K}_2 \mathbf{M}_{11}$ y $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{K}_2 \mathbf{M}_{12}$:

$$\mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12} = \mathbf{K}_2\mathbf{M}_{11}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12} = \mathbf{K}_2\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{22}$$

lo que demuestra que:

$$AA^{-1}A = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$$

Regla de Sarrus

Existen varios algoritmos para resolver sistemas de ecuaciones, algunos de los cuales no requieren el cálculo de una inversa. Uno de éstos últimos consiste en aplicar la llamada regla de Sarrus que permite resolver sistemas en forma numérica o algebraica.

Sean:

$$\mathbf{A} \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Si se sustituye una columna de \mathbf{A} (por ejemplo la primera) por el vector \mathbf{r} , se obtiene una matriz \mathbf{A}^* modificada:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} r_1 & b & c \\ r_2 & e & f \\ r_3 & h & i \end{bmatrix}$$

y puede demostrarse que la solución para β_1 será:

$$\beta_1 = \frac{|\mathbf{A}^*|}{|\mathbf{A}|}$$

y en general:

$$\beta_i = \frac{|A_i^*|}{|A|}$$

donde A_i^* indica la matriz resultante de sustituir la i ésima columna de A por el vector r .

Algunos resultados y propiedades

1. $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j .
2. Si $A = B \rightarrow AC = BC$ y $DA = DB$
3. $[A^{-1}]^{-1} = A$
4. $[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. $|AB| = |A| |B|$
6. Si A y B son diagonales entonces $C = AB$ también es diagonal.
7. Si A es simétrica, entonces $A' = A$.
8. $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$; regla de rotación de las trazas.
9. $(AB)' = B'A'$, $(ABC)' = C'B'A'$, etc.
10. Si un vector b está compuesto de constantes, su derivada vale 0.
11. $\partial a'b / \partial b = a$, donde ∂ indica derivada.
12. $\partial b'Ab / \partial b = 2Ab$.